Correction de devoir maison $n°8$

On pose $h : t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ pour } t \in \left]0,\pi\right].$$

1. Pour $t \in \left]0,\pi\right]$, $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$ donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left]0,\pi\right]$ par quotient, produit et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   De plus, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = -1 = \varphi(0)$, donc φ est continue sur $[0,\pi]$.
   Pour $t \in \left]0,\pi\right]$,
   $$\varphi'(t) = \frac{2\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(\frac{t}{2}) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(\frac{t}{2})}{4\sin^2(\frac{t}{2})}.$$
   Or $2\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(\frac{t}{2}) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(\frac{t}{2}) \underset{t\to 0}{=} 2\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(\frac{t}{2} + \circ(t^2)\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)(1 + \circ(t)) \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2}{2\pi} + \circ(t^2)$.
   D'où $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = \dfrac{1}{2\pi}$, d'après le théorème de la limite de la dérivée φ est dérivable en 0 et φ' est continue en 0.
   Conclusion : φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on va réaliser deux intégrations par parties successives.
   $$\begin{aligned}\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \left[h(t)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi h'(t)\frac{1}{k}\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k}\left(\left[-h'(t)\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_0^\pi + \int_0^\pi h''(t)\frac{1}{k}\cos(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{k}\left(\left[-\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_0^\pi + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \left]0,\pi\right]$,
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{ikt}\right) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\frac{1 - \mathrm{e}^{int}}{1 - \mathrm{e}^{it}}\right) - 1 \\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)t}{2}}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{nt}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{nt}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}}\right) - 1 \\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} h(t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} h(t) \left(\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{h(t)}{2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

5. Soit $\psi \in \mathscr{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$. À l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t = \left[-\psi(t)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \psi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, donc $t \mapsto \psi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$ est bornée sur $[0,\pi]$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t = 0$.

6. On utilise la question précédente avec $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$.
On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = -\int_0^{\pi} \frac{h(t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left(-\frac{t^2}{4\pi} + \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\pi^3}{12\pi} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$